4次元の正多面体

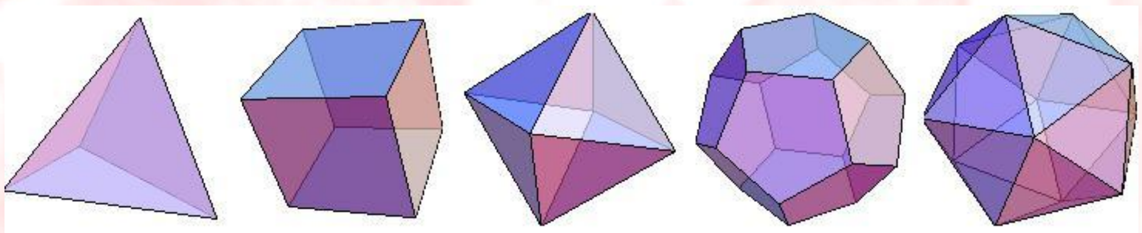
３次元正多面体とは、各面が合同な正多角形でできており各頂点で出あう面の数が同じ立体です。正四面体、立方体、正八面体、正十二面体、正二十面体の五つ存在し、プラトンの多面体とも呼ばれています。Ｖを頂点の数、Ｅを辺の数、Ｆを面の数とすると

	面	V	E	F	V－E+F
正4面体	正三角形	4	6	4	2
正方体	正方形	8	12	6	2
正8面体	正三角形	6	12	8	2
正12面体	正五角形	20	30	12	2
正20面体	正三角形	12	30	20	2

となります。

$$V-E+F=2$$

という式は任意の穴のない３次元多面体で成り立つことが知られており、**オイラーの多面体定理**と呼ばれています。



正方体と正八面体は、面の中心に頂点を置くことで移り合います。このことを双対の関係にあるといいます。Ｖ，Ｅ，Ｆの数もちょうど裏返しになっていますね。同じことは、正十二面体と正二十面体でも成り立ちます。正四面体は自分自身と双対なので自己双対とよばれます。

４次元ではどうなるでしょう。

この場合には、正多角形の代わりに合同な正多面体の**胞**でできた立体で、各頂点での集まり方が同じものが対応します。そのような４次元立体はちょうど六個存在します。これを**正多胞体**と呼びます。Ｃを胞の数とすると

	胞	V	E	F	C	V-E+F-C
正 5 胞体	正 4 面体	5	10	10	5	0
正 8 胞体	正 6 面体	16	32	24	8	0
正 16 胞体	正 4 面体	8	24	32	16	0
正 24 胞体	正 8 面体	24	96	96	24	0
正 120 胞体	正 12 面体	600	1200	720	120	0
正 600 胞体	正 4 面体	120	720	1200	600	0

私たちは３次元の世界に住んでいるので４次元立体を直接見ることができませんが、数学を用いて調べることができ、３次元に投影して目で見ることもできます。この美しい立体は**正１２０胞体**の一つの投影図です。このような多胞体のオイラーの定理は

$$V-E+F-C=0$$

となります。この公式は任意の穴のない４次元多胞体で成り立ちます。

正８胞体と正１６胞体、正１２０胞体と正６００胞体はそれぞれ双対の関係にあり、正５胞体、正２４胞体は自己双対となっています。